数理解析研究所講究録 1465 巻 2006 年 77-87

$STD_4[12;3]$ の自己同型群

秋山献之 (福岡大 理学部)、末竹 千博 (大分大学 工学部)

1. 導入

1.1 定義

$STD_\lambda[k;u]$ (**symmetric transversal design**) とは、次の4つの条件を満たす結合構造 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ のことである。

(i) 各ブロックは、丁度 k 個の点を含む。
(ii) $|(P,Q)|$ を、異なる2点 $P,Q\in\mathcal{P}$ を通るブロックの個数とすると、$|(P,Q)|=0,\ \lambda$ である。
(iii) $\mathcal{P}$ は、次の条件を満たす、等しいサイズ u を持つ k 個の部分集合 $\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}$ に分割される。すなわち、$|(P,Q)|=0$ であるための必要十分条件は、P と Q がある同一の $\mathcal{P}_i$ に含まれることである。ここで、$\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}$ は $\mathcal{D}$ の **point groups** と呼ばれる。
(iv) $\mathcal{D}$ の双対構造もまた、条件 (i),(ii),(iii) を満たす。この双対構造における point groops は、$\mathcal{D}$ の **block groups** と呼ばれる。

この定義において、$|\mathcal{P}|=|\mathcal{B}|=ku,\ k=\lambda u$ であることが、簡単に示される。

• 講演者の一人は、2004年に、位数16の自己同型群を持つ位数12の射影平面は存在しないことを証明した。([S1]) もし、位数16の自己同型群を持つ位数12の射影平面が存在したとすると、位数8の自己同型群を持つ $STD_2[12;6]$ が存在するのであるが、このような STD が存在しないことをコンピュータの助けをかりて示したのである。

• 一般に u が素数べきでないような $STD_\lambda[k;u]$ の存在は一つも知られていない。u が合成数であるような、その存在・非存在が知られていない一番小さい STD は $STD_2[12;6]$ である。

• 実は、$k=u$ のとき、$STD_1[k;k]$ の存在は、位数 k の射影平面の存在と同値である。更に面白いのは、$u=2$ のとき、$STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ の存在は、位数 k のアダマールデザインの存在と同値であるということである。

- $k = 12$のとき、次の5つのSTDが考えられる。

$$STD_6[12;2],\quad STD_4[12;3],\quad STD_3[12;4],\quad STD_2[12;6],\quad STD_1[12;12]$$

$STD_6[12;2]$は位数12のアダマールデザインと同値な結合構造であり、1個しか存在しない。この講演では、$STD_4[12;3]$について述べる。$STD_4[12;3]$も1個しかない([S2])。我々は、$STD_4[12;3]$の自己同型群に興味を持った。
$STD_3[12;4]$の存在も知られているが、分類はされていない。

1.2 問題 $STD_3[12;4]$を分類せよ。

$STD_2[12;6]$, $STD_1[12;12]$の存在非存在は知られていない。

1.3 問題 $STD_3[12;4]$をある意味で縮小すると$STD_6[12;2]$が構成されると信じているが、このことを示せ。

次の関係があると空想している。問題3が肯定的に示されれば、空想の一部分が正しいことになる。もし$STD_2[12;6]$があれば、それは$STD_4[12;3]$または$STD_6[12;2]$を「拡大」して作れる。もし$STD_1[12;12]$があれば、それは$STD_2[12;6]$または$STD_3[12;4]$を「拡大」して作れる。

ここで、最もきれいな結合構造は$STD_1[12;12]$と$STD_6[12;2]$である。uの値が大きくなればなるほど存在の条件が厳しくなると考えている。ここで述べた事柄はkが素数べきであるとき妥当性がある。例えば、$STD_1[16;16]$から$STD_2[16;8]$は次のようにして構成できる。$STD_1[16;16]$は$PG(2,16)$から1つの直線l_∞上のすべての点とl_∞上の1点P_0を通るすべての直線を除くことによって得られる。$STD_1[16;16]$において、位数2の(P_0, l_∞)−elationから生成される位数2の群Eの点軌道の全体を新たに点集合、ブロック軌道全体を新たにブロック集合と考え、結合関係を自然にいれると、$STD_2[16;8]$が得られる。

2. $GL-$正則STDと$LO-$正則STD

2.1 定義 (Drake, Jungnickel)
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ とする。$\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$を$\mathcal{D}$ のpoint groupsからなる集合で、$\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$を$\mathcal{D}$ の block groups からなる集合とする。Uを$\mathcal{D}$の自己同型群とし、Uは各$\mathcal{P}_i$と$\mathcal{B}_j$を、それぞれ集合として固定し、各$\mathcal{P}_i$上と各$\mathcal{B}_j$上に正則に作用するとする。このとき、$\mathcal{D}$をUに関して$LO-$正則という。この場合、Uの位数はuとなる。(この用語法は我々による。)

U に関する $LO-$ 正則 $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ の存在は、generalized Hadamard matrix $GH(k;U)$ 存在と同値な概念であり、これまで盛んに研究されてきた。しかしながら、Mavron and Tonchev[MT] によると、一般アダマールでない2つの $STD_3[9;3]$ が存在する。我々は、一般アダマールと別な自己同型群についての定義を考えることにした。

2.2 定義
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ とする。$\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の point groups からなる集合で、$\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の block groups からなる集合とする。K を $\mathcal{D}$ の自己同型群で、Ω と Δ の両方の上に正則に作用するものとする。このとき、$\mathcal{D}$ を K に関して $GL-$ 正則 $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ と呼ぶ。この場合、K の位数は k となる。

2.3 予想 ([H])
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ とする。$\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の point groups からなる集合で、$\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の block groups からなる集合とする。K と U を $\mathcal{D}$ の2つの自己同型群で、$|K| = k$, $|U| = u$ とする。$\mathcal{D}$ が K に関して $GL-$ 正則で、かつ U に関して $LO-$ 正則とする。このとき、$[K, U] = 1$ で、KU は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 両方の上で正則に作用する。

2.4 定理 ([H])
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を $STD_{\frac{k}{u}}[k;u]$ とする。$\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の point groups からなる集合で、$\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$ を $\mathcal{D}$ の block groups からなる集合とする。K と U を $\mathcal{D}$ の2つの自己同型群で、$|K| = k$, $|U| = u$ とする。$\mathcal{D}$ が K に関して $GL-$ 正則で、かつ U に関して $LO-$ 正則とする。このとき、K は U を正規化し、KU は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 両方の上で正則に作用する。

定義2.2は、[S2] 以後、考え出された。平峰氏にはこの定義にたどり着くまで、貴重な助言をいただいた。定義2.2は小さいサイズのSTDを捜すのに有効である。次の節で自己同型群 K に関して $GL-$ 正則である $STD_4[12;3]$ をすべて決定する。$STD_4[12;3]$ は1つしかない ([S2]) が、K は3種類ある。

3. $GL-$ 正則 $STD_4[12;3]$

$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を K に関して $GL-$ 正則 $STD_4[12;3]$ とする。$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{11}$ を $\mathcal{D}$ の point groups とする。$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{11}$ を $\mathcal{D}$ の block groups とする。$\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{11}\}$, $\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{11}\}$ とおく。$\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_{35}\}$, $\mathcal{P}_0 = \{P_0, P_1, P_2\}$, $\mathcal{P}_1 = \{P_3, P_4, P_5\}, \cdots, \mathcal{P}_{11} = \{P_{33}, P_{34}, P_{35}\}$ $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \cdots, B_{35}\}$, $\mathcal{B}_0 = \{B_0, B_1, B_2\}$, $\mathcal{B}_1 = \{B_3, B_4, B_5\}, \cdots, \mathcal{B}_{11} = \{B_{33}, B_{34}, B_{35}\}$ とする。

$L=(l_{ij})_{0\leq i,j\leq 35}$ を $\mathcal{D}$ を上記の点とブロックの番号付けに対する $\mathcal{D}$ の結合行列とする。

$$L=\begin{pmatrix} L_{0\,0} & L_{0\,1} & \cdots & L_{0\,11} \\ L_{1\,0} & L_{1\,1} & \cdots & L_{1\,11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{11\,0} & L_{11\,1} & \cdots & L_{11\,11} \end{pmatrix}$$

とかける。ここで、各 L_i $(0\leq i,j\leq 11)$ は3次の置換行列である。

次が成り立つ。

• I を3次の単位行列、J を 3×3 全1行列とする。このとき、

$$(*)\quad LL^t=\begin{pmatrix} 12I & 4J & \cdots & 4J & 4J \\ 4J & 12I & \cdots & 4J & 4J \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 4J & 4J & \cdots & 4J & 12I \end{pmatrix}$$

である。

• $LL^t=L^tL$

3次の置換行列を次のように、数0,1,2,3,4,5と対応させる。(計算機で計算して、L を求める場合、このような対応付けをしておくと便利である。)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 0,\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 1,\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 3,\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 4,\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longleftrightarrow 5$$

従って、L は $\{0,1,2,3,4,5\}$ 上の12次の正方行列になる。

次の補題は以下の節の考察で有用である。

3.1 補題

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ とする。

$k_0,k_1,k_2,l_0,l_1,l_2,l\in Z$ で $k_0+k_1\sigma+k_2\sigma^2+l_0\tau+l_1\sigma\tau+l_2\sigma^2\tau=l\delta$ とする。
このとき、$k_0=k_1=k_2,\ l_0=l_1=l_2$ である。

$L_j = L_{0\ j}$ $(0 \le j \le 11)$ とおく。同型を無視して、Kの可能性は5通り。

(i) $K = <\varphi | \varphi^{12} = 1>$ のとき
φの$\mathcal{P}$上の作用を$\varphi = (P_0, P_3, P_6, \cdots, P_{33})\ (P_1, P_4, P_7, \cdots, P_{34})\ (P_2, P_5, P_8, \cdots, P_{35})$ φの$\mathcal{B}$上の作用を$\varphi = (B_0, B_3, B_6, \cdots, B_{33})\ (B_1, B_4, B_7, \cdots, B_{34})\ (B_2, B_5, B_8, \cdots, B_{35})$とする。

$$L = \begin{pmatrix}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} \\
L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} \\
L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 \\
L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\
L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 \\
L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 \\
L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 \\
L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\
L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 \\
L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 \\
L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 \\
L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0
\end{pmatrix}$$

$\widetilde{L} = (\widetilde{l_{ij}})_{0 \le i,j \le 11}$ を次のように定義する。

$$\widetilde{l_{ij}} = \begin{cases} a & (l_{ij} \in \{0,1,2\} \text{のとき}) \\ b & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$l_0 = \widetilde{l_{0\ 0}}, l_1 = \widetilde{l_{0\ 1}}, \cdots, l_{11} = \widetilde{l_{0\ 11}}$ とおく。$l_0 = a$で、$\{l_0, l_1, \cdots, l_{11}\}$ に含まれるaの個数はbの個数に等しいか、または大きいとしてよい。まず、プログラム"std12-a"で$(l_0, l_1, \cdots, l_{11})$の可能性を調べる。次の7通りある。

	$l_0, l_1, \cdots, l_{11}$
1	aaaaaaaaaaaa
2	aaabaaabaaab
3	aabaaabaaaba
4	aabbaabbaabb
5	abaaabaaabaa
6	abababababab
7	abbaabbaabba

これら26個の形から、(1),(2),(4),(6) の4通りを考えればよいことがわかる。プログラム"std12-a1,std12-a2,std12-a4,std12-a6" で調べる。いずれの場合も非存在である。

(ii) $K = <\varphi,\ \tau | \varphi^6 = 1,\ \tau^2 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi>$ のとき
φの$\mathcal{P}$上の作用を$\varphi = (P_0, P_3, P_6, P_9, P_{12}, P_{15})\ (P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16})\ (P_2, P_5, P_8, P_{11}, P_{14}, P_{17})\ (P_{18}, P_{21}, P_{24}, P_{27}, P_{30}, P_{33})\ (P_{19}, P_{22}, P_{25}, P_{28}, P_{31}, P_{34})\ (P_{20}, P_{23}, P_{26}, P_{29}, P_{32}, P_{35})$
φの$\mathcal{B}$上の作用を$\varphi = (B_0, B_3, B_6, B_9, B_{12}, B_{15})\ (B_1, B_4, B_7, B_{10}, B_{13}, B_{16})\ (B_2, B_5, B_8, B_{11}, B_{14}, B_{17})\ (B_{18}, B_{21}, B_{24}, B_{27}, B_{30}, B_{33})\ (B_{19}, B_{22}, B_{25}, B_{28}, B_{31}, B_{34})\ (B_{20}, B_{23}, B_{26}, B_{29}, B_{32}, B_{35})$ とする。
τの$\mathcal{P}$上の作用を$\tau = (P_0, P_{18})(P_1, P_{19})(P_2, P_{20}) \cdots$ とし、τの$\mathcal{B}$上の作用を$\tau = (B_0, B_{18})(B_1, B_{19})(B_2, B_{20}) \cdots$ とする。

$\tau = (P_0, P_{18})(P_1, P_{19})(P_2, P_{20})\ (P_3, P_{21})(P_4, P_{22})(P_5, P_{23})\ (P_6, P_{24})(P_7, P_{25})(P_8, P_{26})\ (P_9, P_{27})(P_{10}, P_{28})\ (P_{11}, P_{29})\ (P_{12}, P_{30})(P_{13}, P_{31})(P_{14}, P_{32})\ (P_{15}, P_{33})(P_{16}, P_{34})(P_{17}, P_{35})$
$\tau = (B_0, B_{18})(B_1, B_{19})(B_2, B_{20})\ (B_3, B_{21})(B_4, B_{22})(B_5, B_{23})\ (B_6, B_{24})(B_7, B_{25})(B_8, B_{26})\ (B_9, B_{27})\ (B_{10}, B_{28})(B_{11}, B_{29})\ (B_{12}, B_{30})(B_{13}, B_{31})(B_{14}, B_{32})\ (B_{15}, B_{33})(B_{16}, B_{34})(B_{17}, B_{35})$

$$L = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} \\
L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} \\
L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 \\
L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 \\
L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 \\
L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 \\
\hline
L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 \\
L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\
L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 \\
L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 \\
L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 \\
L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0
\end{array}\right)$$

$l_0 = a$で、$\{l_0, l_1, \cdots, l_{11}\}$ に含まれるaの個数はbの個数に等しいか、または大きいとしてよい。また、$\{l_0, l_1, \cdots, l_5\}$

に含まれる a の個数を n_0、$\{l_6, l_7, \cdots, l_{11}\}$ に含まれる a の個数を n_1 とするとき $n_0 \geq n_1$ としてよい。まず、プログラム"std12-b"で $(l_0, l_1, \cdots, l_{11})$ の可能性を調べる。次の6通りある。

	$l_0, l_1, \cdots, l_5$	$l_6, \cdots, l_{11}$
1	$aaaaaa$	$aaaaaa$
2	$aaaaaa$	$ababab$
3	$aaaaaa$	$bababa$
4	$aaaaaa$	$bbbbbb$
5	$ababab$	$ababab$
6	$ababab$	$bababa$

プログラム"std12-b1,std12-b2,$\cdots$,std12-b6" で調べる。std12-b1 のみ存在する。例えば、

$$L = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

(iii) $K = <\varphi,\ \tau | \varphi^6 = 1,\ \tau^2 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi^{-1}>$ のとき
φ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\varphi = (P_0, P_3, P_6, P_9, P_{12}, P_{15})\ (P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16})\ (P_2, P_5, P_8, P_{11}, P_{14}, P_{17})$ $(P_{18}, P_{21}, P_{24}, P_{27}, P_{30}, P_{33})\ (P_{19}, P_{22}, P_{25}, P_{28}, P_{31}, P_{34})\ (P_{20}, P_{23}, P_{26}, P_{29}, P_{32}, P_{35})$
φ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\varphi = (B_0, B_3, B_6, B_9, B_{12}, B_{15})\ (B_1, B_4, B_7, B_{10}, B_{13}, B_{16})\ (B_2, B_5, B_8, B_{11}, B_{14}, B_{17})$ $(B_{18}, B_{21}, B_{24}, B_{27}, B_{30}, B_{33})\ (B_{19}, B_{22}, B_{25}, B_{28}, B_{31}, B_{34})\ (B_{20}, B_{23}, B_{26}, B_{29}, B_{32}, B_{35})$ とする。
τ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\tau = (P_0, P_{18})(P_1, P_{19})(P_2, P_{20})\cdots$ とし、τ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\tau = (B_0, B_{18})(B_1, B_{19})(B_2, B_{20})\cdots$ とする。

$\tau = (P_0, P_{18})(P_1, P_{19})(P_2, P_{20})\ (P_3, P_{33})(P_4, P_{34})(P_5, P_{35})\ (P_6, P_{30})(P_7, P_{31})(P_8, P_{32})\ (P_9, P_{27})(P_{10}, P_{28})$ $(P_{11}, P_{29})\ (P_{12}, P_{24})(P_{13}, P_{25})(P_{14}, P_{26})\ (P_{15}, P_{21})(P_{16}, P_{22})(P_{17}, P_{23})$
$\tau = (B_0, B_{18})(B_1, B_{19})(B_2, B_{20})\ (B_3, B_{33})(B_4, B_{34})(B_5, B_{35})\ (B_6, B_{30})(B_7, B_{31})(B_8, B_{32})\ (B_9, B_{27})$ $(B_{10}, B_{28})(B_{11}, B_{29})\ (B_{12}, B_{24})(B_{13}, B_{25})(B_{14}, B_{26})\ (B_{15}, B_{21})(B_{16}, B_{22})(B_{17}, B_{23})$

$$L = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} \\
L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} \\
L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 \\
L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_2 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 & L_8 \\
L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_1 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 & L_7 \\
L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_0 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_6 \\
\hline
L_6 & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_8 & L_7 & L_0 & L_5 & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 \\
L_7 & L_6 & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_8 & L_1 & L_0 & L_5 & L_4 & L_3 & L_2 \\
L_8 & L_7 & L_6 & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_2 & L_1 & L_0 & L_5 & L_4 & L_3 \\
L_9 & L_8 & L_7 & L_6 & L_{11} & L_{10} & L_3 & L_2 & L_1 & L_0 & L_5 & L_4 \\
L_{10} & L_9 & L_8 & L_7 & L_6 & L_{11} & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 & L_0 & L_5 \\
L_{11} & L_{10} & L_9 & L_8 & L_7 & L_6 & L_5 & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 & L_0
\end{array}\right)$$

$l_0 = a$ で、$\{l_0, l_1, \cdots, l_{11}\}$ に含まれる a の個数は b の個数に等しいか、または大きいとしてよい。また、$\{l_0, l_1, \cdots, l_5\}$ に含まれる a の個数を n_0、$\{l_6, l_7, \cdots, l_{11}\}$ に含まれる a の個数を n_1 とするとき $n_0 \geq n_1$ としてよい。まず、プログラム"std12-c"で $(l_0, l_1, \cdots, l_{11})$ の可能性を調べる。次の通りある。

	$l_0, l_1, \cdots, l_5$	$l_6, \cdots, l_{11}$
1	$aaaaaa$	$aaaaaa$
2	$aaaaaa$	$ababab$
3	$aaaaaa$	$bababa$
4	$aaaaaa$	$bbbbbb$
5	$ababab$	$ababab$
6	$ababab$	$bababa$

プログラム"std12-c1,std12-c2,$\cdots$,std12-c6" で調べる。全て非存在。

(iv) $K = <\varphi,\ \tau | \varphi^3 = 1,\ \tau^4 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi^{-1}>$ のとき

φ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\varphi=(P_0,P_3,P_6)(P_1,P_4,P_7)(P_2,P_5,P_8)\ (P_9,P_{12},P_{15})(P_{10},P_{13},P_{16})(P_{11},P_{14},P_{17})$ $(P_{18},P_{21},P_{24})(P_{19},P_{22},P_{25})(P_{20},P_{23},P_{26})\ (P_{27},P_{30},P_{33})(P_{28},P_{31},P_{34})(P_{29},P_{32},P_{35})$
φ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\varphi\ =\ (B_0,B_3,B_6)(B_1,B_4,B_7)(B_2,B_5,B_8)\ (B_9,B_{12},B_{15})(B_{10},B_{13},B_{16})(B_{11},B_{14},B_{17})$ $(B_{18},B_{21},B_{24})(B_{19},B_{22},B_{25})(B_{20},B_{23},B_{26})\ (B_{27},B_{30},B_{33})(B_{28},B_{31},B_{34})(B_{29},B_{32},B_{35})$ とする。
τ の $\mathcal{P}$ 上の作用を
$\tau=(P_0,P_9,P_{18},P_{27})(P_1,P_{10},P_{19},P_{28})(P_2,P_{11},P_{20},P_{29})\cdots$ とし、τ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\tau=(B_0,B_9,B_{18},B_{27})$ $(B_1,B_{10},B_{19},B_{28})(B_2,B_{11},B_{20},B_{29})\cdots$ とする。
$\tau=(P_0,P_9,P_{18},P_{27})(P_1,P_{10},P_{19},P_{28})(P_2,P_{11},P_{20},P_{29})\ (P_3,P_{15},P_{21},P_{33})(P_4,P_{16},P_{22},P_{34})$ $(P_5,P_{17},P_{23},P_{35})\ (P_6,P_{12},P_{24},P_{30})(P_7,P_{13},P_{25},P_{31})(P_8,P_{14},P_{26},P_{32})$
$\tau=(B_0,B_9,B_{18},B_{27})(B_1,B_{10},B_{19},B_{28})(B_2,B_{11},B_{20},B_{29})\ (B_3,B_{15},B_{21},B_{33})(B_4,B_{16},B_{22},B_{34})$ $(B_5,B_{17},B_{23},B_{35})\ (B_6,B_{12},B_{24},B_{30})(B_7,B_{13},B_{25},B_{31})(B_8,B_{14},B_{26},B_{32})$

$$L=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11}\\
L_2 & L_0 & L_1 & L_5 & L_3 & L_4 & L_8 & L_6 & L_7 & L_{11} & L_9 & L_{10}\\
L_1 & L_2 & L_0 & L_4 & L_5 & L_3 & L_7 & L_8 & L_6 & L_{10} & L_{11} & L_9\\
\hline
L_9 & L_{11} & L_{10} & L_0 & L_2 & L_1 & L_3 & L_5 & L_4 & L_6 & L_8 & L_7\\
L_{10} & L_9 & L_{11} & L_1 & L_0 & L_2 & L_4 & L_3 & L_5 & L_7 & L_6 & L_8\\
L_{11} & L_{10} & L_9 & L_2 & L_1 & L_0 & L_5 & L_4 & L_3 & L_8 & L_7 & L_6\\
\hline
L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5\\
L_8 & L_6 & L_7 & L_{11} & L_9 & L_{10} & L_2 & L_0 & L_1 & L_5 & L_3 & L_4\\
L_7 & L_8 & L_6 & L_{10} & L_{11} & L_9 & L_1 & L_2 & L_0 & L_4 & L_5 & L_3\\
\hline
L_3 & L_5 & L_4 & L_6 & L_8 & L_7 & L_9 & L_{11} & L_{10} & L_0 & L_2 & L_1\\
L_4 & L_3 & L_5 & L_7 & L_6 & L_8 & L_{10} & L_9 & L_{11} & L_1 & L_0 & L_2\\
L_5 & L_4 & L_3 & L_8 & L_7 & L_6 & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_2 & L_1 & L_0
\end{array}\right)$$

$l_0=a$ で、$\{l_0,l_1,\cdots,l_{11}\}$ に含まれる a の個数は b の個数に等しいか、または大きいとしてよい。
まず、プログラム"std12-d"で $(l_0,l_1,\cdots,l_{11})$ の可能性を調べる。次の7通りある。

	$l_0,l_1,\cdots,l_5$	$l_6,\cdots,l_{11}$
1	$aaaaaa$	$aaaaaa$
2	$aaaaaa$	$aaabbb$
3	$aaaaaa$	$bbbaaa$
4	$aaaaaa$	$bbbbbb$
5	$aaabbb$	$aaaaaa$
6	$aaabbb$	$aaabbb$
7	$aaabbb$	$bbbaaa$

プログラム"std12-d1,$\cdots$,std12-d7" で調べる。std12-d1 のみ存在する。例えば、

$$L=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
0&0&0&0&1&2&0&1&1&1&0&2\\
0&0&0&2&0&1&1&0&1&2&1&0\\
0&0&0&1&2&0&1&1&0&0&2&1\\
\hline
1&2&0&0&0&0&0&2&1&0&1&1\\
0&1&2&0&0&0&1&0&2&1&0&1\\
2&0&1&0&0&0&2&1&0&1&1&0\\
\hline
0&1&1&1&0&2&0&0&0&0&1&2\\
1&0&1&2&1&0&0&0&0&2&0&1\\
1&1&0&0&2&1&0&0&0&1&2&0\\
\hline
0&2&1&0&1&1&1&2&0&0&0&0\\
1&0&2&1&0&1&0&1&2&0&0&0\\
2&1&0&1&1&0&2&0&1&0&0&0
\end{array}\right)$$

(v) $K=<\varphi,\ \tau,\ \mu|\varphi^2=1,\ \tau^2=1,\ \mu^3=1,\ \varphi^\tau=\varphi,\ \varphi^\mu=\tau,\ \varphi^\mu=\varphi\tau>$ のとき
φ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\varphi=(P_0,P_3)(P_6,P_9)(P_{12},P_{15})(P_{18},P_{21})(P_{24},P_{27})(P_{30},P_{33})\ (P_1,P_4)(P_7,P_{10})(P_{13},P_{16})$ $(P_{19},P_{22})(P_{25},P_{28})(P_{31},P_{34})\ (P_2,P_5)(P_8,P_{11})(P_{14},P_{17})(P_{20},P_{23})(P_{26},P_{29})(P_{32},P_{35})$ とし、
φ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\varphi=(B_0,B_3)(B_6,B_9)(B_{12},B_{15})(B_{18},B_{21})(B_{24},B_{27})(B_{30},B_{33})\ (B_1,B_4)(B_7,B_{10})(B_{13},B_{16})$ $(B_{19},B_{22})(B_{25},B_{28})(B_{31},B_{34})\ (B_2,B_5)(B_8,B_{11})(B_{14},B_{17})(B_{20},B_{23})(B_{26},B_{29})(B_{32},B_{35})$ とする。
τ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\tau=(P_0,P_6)(P_1,P_7)(P_2,P_8)\ (P_{12},P_{18})(P_{13},P_{19})(P_{14},P_{20})\ (P_{24},P_{30})(P_{25},P_{31})(P_{26},P_{32})\cdots$
とし、
τ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\tau=(B_0,B_6)(B_1,B_7)(B_2,B_8)\ (B_{12},B_{18})(B_{13},B_{19})(B_{14},B_{20})\ (B_{24},B_{30})(B_{25},B_{31})(B_{26},B_{32})\cdots$
とする。
$\tau=(P_0,P_6)(P_1,P_7)(P_2,P_8)(P_3,P_9)(P_4,P_{10})(P_5,P_{11})\ (P_{12},P_{18})(P_{13},P_{19})(P_{14},P_{20})(P_{15},P_{21})(P_{16},P_{22})(P_{17},P_{23})$ $(P_{24},P_{30})(P_{25},P_{31})(P_{26},P_{32})(P_{27},P_{33})(P_{28},P_{34})(P_{29},P_{35})$
$\tau=(B_0,B_6)(B_1,B_7)(B_2,B_8)(B_3,B_9)(B_4,B_{10})(B_5,B_{11})\ (B_{12},B_{18})(B_{13},B_{19})(B_{14},B_{20})(B_{15},B_{21})(B_{16},B_{22})$ $(B_{17},B_{23})\ (B_{24},B_{30})(B_{25},B_{31})(B_{26},B_{32})(B_{27},B_{33})(B_{28},B_{34})(B_{29},B_{35})$

τ の $\mathcal{P}$ 上の作用を $\tau=(P_0,P_{12},P_{24})(P_1,P_{13},P_{25}),(P_2,P_{14},P_{26})\cdots$ とし、
τ の $\mathcal{B}$ 上の作用を $\tau=(B_0,B_{12},B_{24})(B_1,B_{13},B_{25}),(B_2,B_{14},B_{26})\cdots$ とする。

$\varphi\tau=(P_0,P_9)(P_1,P_{10})(P_2,P_{11})(P_3,P_6)(P_4,P_7)(P_5,P_8)\ (P_{12},P_{21})(P_{13},P_{22})(P_{14},P_{23})(P_{15},P_{18})(P_{16},P_{19})$ $(P_{17},P_{20})\ (P_{24},P_{33})(P_{25},P_{34})(P_{26},P_{35})(P_{27},P_{30})(P_{28},P_{31})(P_{29},P_{32})$
$\varphi\tau=(B_0,B_9)(B_1,B_{10})(B_2,B_{11})(B_3,B_6)(B_4,B_7)(B_5,B_8)\ (B_{12},B_{21})(B_{13},B_{22})(B_{14},B_{23})(B_{15},B_{18})$ $(B_{16},B_{19})(B_{17},B_{20})\ (B_{24},B_{33})(B_{25},B_{34})(B_{26},B_{35})(B_{27},B_{30})(B_{28},B_{31})(B_{29},B_{32})$ であることを注意しておく。
$\mu=(P_0,P_{12},P_{24})(P_1,P_{13},P_{25})(P_2,P_{14},P_{26})\ (P_3,P_{18},P_{33})(P_4,P_{19},P_{34})(P_5,P_{20},P_{35})\ (P_6,P_{21},P_{27})$ $(P_7,P_{22},P_{28})(P_8,P_{23},P_{29})\ (P_9,P_{15},P_{30})(P_{10},P_{16},P_{31})(P_{11},P_{17},P_{32})$
$\mu=(B_0,B_{12},B_{24})(B_1,B_{13},B_{25})(B_2,B_{14},B_{26})\ (B_3,B_{18},B_{33})(B_4,B_{19},B_{34})(B_5,B_{20},B_{35})\ (B_6,B_{21},B_{27})$ $(B_7,B_{22},B_{28})(B_8,B_{23},B_{29})\ (B_9,B_{15},B_{30})(B_{10},B_{16},B_{31})(B_{11},B_{17},B_{32})$

$$L=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc}
L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} & L_{11}\\
L_1 & L_0 & L_3 & L_2 & L_5 & L_4 & L_7 & L_6 & L_9 & L_8 & L_{11} & L_{10}\\ \hline
L_2 & L_3 & L_0 & L_1 & L_6 & L_7 & L_4 & L_5 & L_{10} & L_{11} & L_8 & L_9\\
L_3 & L_2 & L_1 & L_0 & L_7 & L_6 & L_5 & L_4 & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_8\\ \hline
L_8 & L_{11} & L_9 & L_{10} & L_0 & L_3 & L_1 & L_2 & L_4 & L_7 & L_5 & L_6\\
L_{11} & L_8 & L_{10} & L_9 & L_3 & L_0 & L_2 & L_1 & L_7 & L_4 & L_6 & L_5\\ \hline
L_9 & L_{10} & L_8 & L_{11} & L_1 & L_2 & L_0 & L_3 & L_5 & L_6 & L_4 & L_7\\
L_{10} & L_9 & L_{11} & L_8 & L_2 & L_1 & L_3 & L_0 & L_6 & L_5 & L_7 & L_4\\ \hline
L_4 & L_6 & L_7 & L_5 & L_8 & L_{10} & L_{11} & L_9 & L_0 & L_2 & L_3 & L_1\\
L_6 & L_4 & L_5 & L_7 & L_{10} & L_8 & L_9 & L_{11} & L_2 & L_0 & L_1 & L_3\\ \hline
L_7 & L_5 & L_4 & L_6 & L_{11} & L_9 & L_8 & L_{10} & L_3 & L_1 & L_0 & L_2\\
L_5 & L_7 & L_6 & L_4 & L_9 & L_{11} & L_{10} & L_8 & L_1 & L_3 & L_2 & L_0
\end{array}\right)$$

$l_0=a$ で、$\{l_0,l_1,\cdots,l_{11}\}$ に含まれる a の個数は b の個数に等しいか、または大きいとしてよい。
まず、プログラム"std12-e"で $(l_0,l_1,\cdots,l_{11})$ の可能性を調べる。次の16通りある。

	$l_0,l_1,\cdots,l_5$	$l_6,\cdots,l_{11}$
1	*aaaaaa*	*aaaaaa*
2	*aaabaa*	*abaaab*
3	*aaabaa*	*babaaa*
4	*aaabba*	*aaabaa*
5	*aabaaa*	*ababaa*
6	*aabaab*	*aabaaa*
7	*aababa*	*aaaaab*
8	*aabbaa*	*bbbbaa*
9	*aabbbb*	*aabbaa*
10	*abaaaa*	*abbaaa*
11	*abaaaa*	*baaaab*
12	*abaaab*	*aaabaa*
13	*ababab*	*ababab*
14	*ababba*	*baabab*
15	*abbaab*	*babaab*
16	*abbaba*	*abbaab*

プログラム"std12-e1,std12-e2,$\cdots$,std12-e16" で調べる。std12-e1 のみ存在する。例えば、

$$L=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0\\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0\\ \hline
0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline
2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ \hline
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

3.2 定理 ([S2])

$STD_4[12;3]$ は同型を無視して唯一つ存在する。$STD_4[12;3]$ の全自己同型群に位数は $2^5 \cdot 3^3$ である。

3.3 定理
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を自己同型群 K に関する $GL - STD_4[12;3]$ とすると、
$K =< \varphi,\ \tau | \varphi^6 = 1,\ \tau^2 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi >$ または、
$< \varphi,\ \tau | \varphi^3 = 1,\ \tau^4 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi^{-1} >$ または、
$< \varphi,\ \tau,\ \mu | \varphi^2 = 1,\ \tau^2 = 1,\ \mu^3 = 1,\ \varphi^\tau = \varphi,\ \varphi^\mu = \tau,\ \varphi^\mu = \varphi\tau >$ である。

3.4 注意
(i) G を位数 ku の群とし、U を位数 u の G の正規部分群とする。R を $|R| = k$ である G の部分集合とする。このとき、$r_1 r_2{}^{-1}$ $(r_1, r_2 \in R,\ r_1 \neq r_2)$ が $G - U$ の各元を丁度 $\dfrac{k}{u}$ 回表し、U の元を表さないならば、
R を $(k, u, k, \dfrac{k}{u})$semi−regular relative difference set (RDS) relative to U という。

(ii) 定理 3.3 の 3 つの K は 3 つの (12,3,12,4)semi-regular relative difference set relative to U $(|U| = 3)$ を構成する。このうちの最初のものは、[DJM] によって構成されたものの特別な場合である。

(iii) 自己同型群 K に関する $GL-$ 正則 $STD_6[18;3]$ が存在しないこともわかった。

(iv) 非可換自己同型群 K に関する $GL-$ 正則 $STD_7[21;3]$ が存在することもわかった。これは、(21,3,21,7)semi-regular relative difference setrelative to U $(|U| = 3)$ を構成する。これは新しい RDS である。

(v) 自己同型群 $K(\cong \mathbf{Z}_9$ または $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$ に関して $GL-$ 正則であるが、$LO-$ 正則でない $STD_3[9;3]$ $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ が存在する。それらの結合行列 L_1, L_2 をあげて

おく。

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

参考文献

[DJM] J. A. Davis, J. Jedwab and M. Mowbray, New families of semi-regular rerative difference sets, *Designs, Codes and Cryptography* **13**(1998), 131-146.

[H] Y. Hiramine, A personal comunication.

[MU] V. C. Mavron and V. D. Tonchev, On symmetric nets and generalized Hadamard matrices from affine designs, *J. geometry* **67**(2000), 180-187.

[S1] C. Suetake, The nonexistence of projective planes of order 12 with a collineation group of order 16, *J. Combin. Theory Ser. A* **107**(2004)21-48.

[S2] C. Suetake, The classification of symmetric transversal designs $STD_4[12;3]$'s, *Designs, Codes and Cryptography.* **37**(2005), 293-304.

Kenzi Akiyama
Department of Applied Mathematics,
Fukuoka University,
Fukuoka 814-0180,
Japan
*E-mail:*akiyama@sm.fukuoka-u.ac.jp

Chihiro Suetake
Department of Mathematics,
Faculty of Engineering,
Oita University,
Oita 870-1192,
Japan
*E-mail:*suetake@csis.oita-u.ac.jp